

1 Efecto de los Controladores

A continuación se evaluará el efecto que tiene introducir un controlador sobre la respuesta temporal de un sistema, los cuales tienen la posibilidad de modificar la función de transferencia del sistema a lazo cerrado, gracias a lo cual se puede modificar la respuesta del mismo. Los diferentes tipos de controladores, muy utilizados en la industria, que serán analizados a continuación son los siguientes:

- Proporcional (P)
- Proporcional derivativo (PD)
- Proporcional integral (PI)
- Proporcional integral derivativo (PID)

Inicialmente se describirá el efecto que tiene cada uno de ellos sobre la respuesta temporal del sistema y más adelante se plantearán dos metodologías muy sencillas que serán utilizadas para especificar el valor de los parámetros del controlador. Una de ellas se fundamenta en la reubicación de los polos del sistema a lazo cerrado y la otra será una sintonización empírica del controlador. Cada tipo de controlador será introducido tal como se puede apreciar en el sistema de control que se muestra en la Figura 1.1, en la cual $G_c(s)$ y $G_p(s)$ corresponden con la función de transferencia del controlador y del proceso respectivamente.

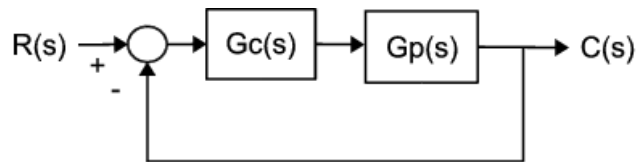


Figura 1.1: Esquema de Control

1.1. Controlador Proporcional (P)

Un controlador proporcional tiene una función de transferencia tal como se muestra en la Ec. 1.1, en la cual K_c es conocida como la ganancia proporcional del controlador.

$$G_c(s) = K_c \quad (1.1)$$

1 Efecto de los Controladores

Este tipo de controladores logra un efecto tanto en la parte transitoria como en la parte permanente de la respuesta transitoria. La modificación de la respuesta transitoria se logra gracias a que los polos a lazo cerrado pueden modificarse al variar K_c pues la ecuación característica del sistema a lazo cerrado viene a ser como se muestra en la ec. 1.2, por lo que la ubicación de los polos dependerá del valor de K_c .

$$1 + K_c G_p(s) = 0 \quad (1.2)$$

En cuánto a la respuesta permanente, el error del sistema depende de la ganancia a lazo abierto, a mayor ganancia menor error, por lo que, modificando el valor de K_c se podrá modificar el error en estado estacionario. Con la intención de ilustrar el efecto de este tipo de controladores, se considera un sistema de control similar al mostrado en la fig. 1.1, para el cual la función de transferencia a lazo abierto, $G_p(s)$ y la función de transferencia a lazo cerrado $G_{LC}(s)$, se muestran en las Ecs. 1.3 y 1.4, respectivamente.

$$G_p(s) = \frac{25}{s^2 + 50s + 25} \quad (1.3)$$

$$G_{LC}(s) = \frac{25K_c}{s^2 + 50s + 25(1 + K_c)} \quad (1.4)$$

A partir de allí se varía el valor de la ganancia proporcional de 1 a 100 y se muestran las respuestas del sistema de control en las figuras 1.2 (a) y (b). Al mismo tiempo se calculan, para dichos valores de ganancia, ciertas características de la respuesta temporal las cuales se detallan en la Tabla 1.1.

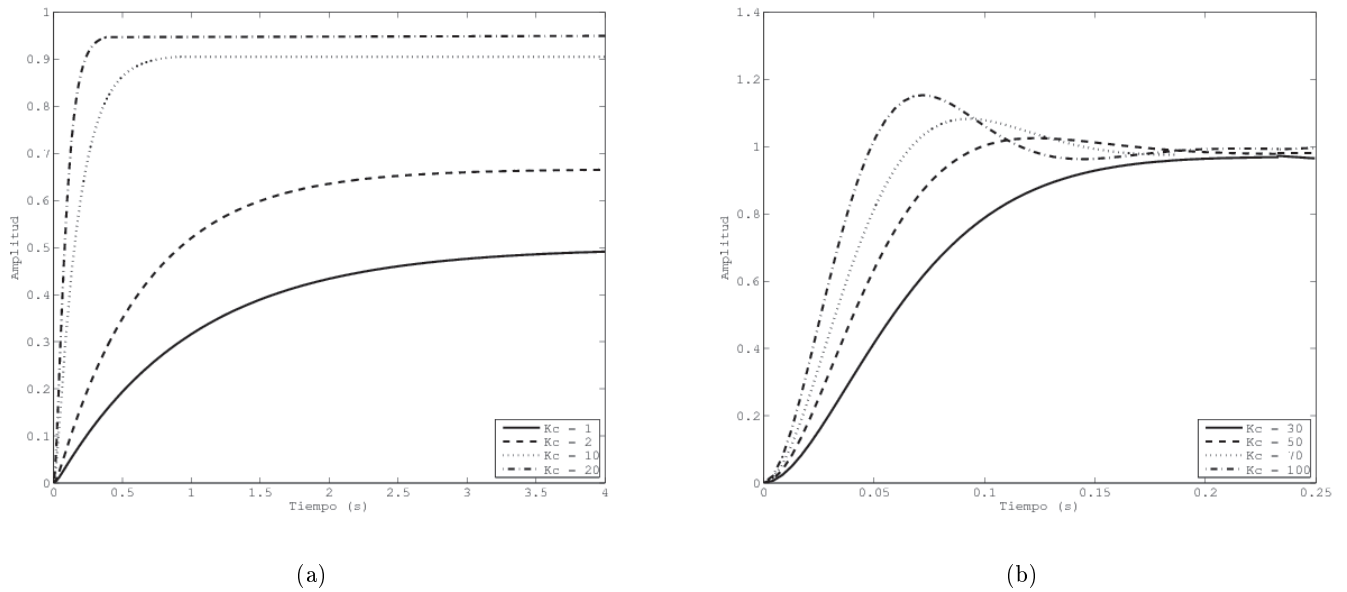


Figura 1.2: Respuesta al escalón (Controlador Proporcional)

K_c	ζ	ω_n	$t_s(2\%)$	$Mp(\%)$	e_{ss}
1	3,54	7,07	3,92	0	0,5
2	2,89	8,66	2,58	0	0,33
10	1,51	16,58	0,64	0	0,09
20	1,09	22,91	0,27	0	0,05
30	0,90	27,84	0,16	0,16	0,03
50	0,70	35,71	0,16	4,59	0,02
70	0,59	42,13	0,16	9,87	0,01
100	0,5	50,25	0,16	16,50	0,01

Cuadro 1.1: Características Teóricas de la Respuesta (Controlador Proporcional)

Tal como se puede apreciar en el ejemplo anterior a medida que varía el valor de la ganancia proporcional se modifica la respuesta del sistema de control, tanto transitoria como permanente. Más específicamente, a medida que aumenta K_c , desde uno a veinte, se observa una reducción apreciable en el tiempo de establecimiento y en el error, pero a partir de allí los incrementos en ganancia producen un sobreimpulso creciente, un tiempo de establecimiento fijo y un error cuya reducción es muy pequeña.

En conclusión, tal como se describió anteriormente, los controladores proporcionales pueden ofrecer mejoras en la respuesta del sistema de control, tanto en el transitorio como en el permanente, pero dicha mejora es reducida.

1.2. Controlador Proporcional Derivativo (PD)

En este caso la función de transferencia del controlador viene expresada tal como se muestra en la Ec. 1.5, en la cual K_c y T_d corresponden con la ganancia proporcional y el tiempo derivativo, respectivamente.

$$G_c(s) = K_c (1 + T_d s) \quad (1.5)$$

Al introducir dicho controlador en el lazo abierto, se presentará una modificación mayor en la ecuación característica a lazo cerrado, que la introducida con un controlador proporcional, tal que la reubicación de los polos dependerá de los valores de K_c y T_d . Por ello, con este tipo de controlador se tendrá un mejor manejo de la respuesta transitoria a lazo cerrado, en tanto que, la respuesta permanente solamente se verá influenciada por el valor de K_c . Esto último se confirma al verificar que la ganancia del sistema a lazo abierto no se ve afectada por el valor de T_D . Resumiendo, se puede concluir que la introducción de un controlador proporcional derivativo logrará una mejora sustancial de la respuesta transitoria y una mejora del error similar a la proporcionada por un controlador proporcional puro.

Al igual que en el caso anterior se utiliza un ejemplo particular para ilustrar el efecto de este tipo de controladores sobre la respuesta a lazo cerrado, para lo cual se parte del mismo sistema de control

planteado anteriormente. Ahora la función de transferencia a lazo cerrado quedará tal como se muestra en la Ec. 1.6.

$$G_{LC}(s) = \frac{25K_c (1 + T_d s)}{s^2 + (50 + T_d) s + 25 (1 + K_c)} \quad (1.6)$$

Se utiliza un valor de ganancia proporcional igual a 100 para el cual el error en estado estacionario se ha reducido apreciablemente en comparación con el error del sistema original, pero la respuesta transitoria se ha visto desmejorada. En la Fig. 1.3 se puede observar el efecto de añadir una parte derivativa al controlador, así mismo se calculan, para dichos valores de ganancia y de tiempo derivativo, ciertas características de la respuesta temporal las cuales se detallan en la Tabla 1.2.

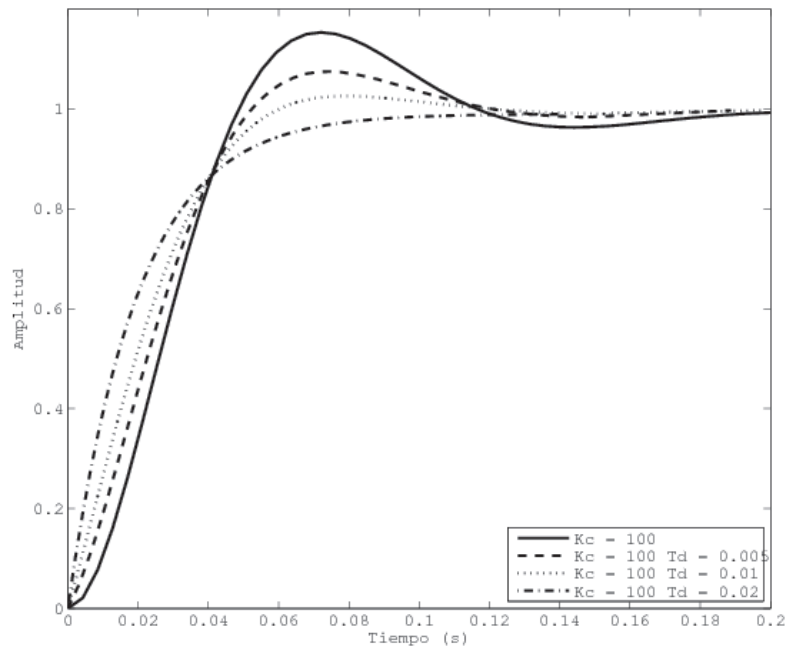


Figura 1.3: Respuesta al escalón (Controlador Proporcional Derivativo)

K_c	T_d	ζ	ω_n	$t_s (2\%)$	$Mp (\%)$	e_{ss}
100	0	0,59	42,13	0,16	9,87	0,01
100	0,005	0,62	50,25	0,13	8,25	0,01
100	0,01	0,75	50,25	0,11	2,95	0,01
100	0,02	1	50,25	0,08	0	0,01

Cuadro 1.2: Características Teóricas de la Respuesta (Controlador Proporcional)

Tal como se puede apreciar en el ejemplo presentado, al añadir una parte derivativa en el controlador se proporciona una mejora importante a la respuesta transitoria disminuyendo el sobreimpulso y el tiempo de establecimiento a medida que aumenta el efecto derivativo. Al mismo tiempo se destaca un error que no presenta modificación con la variación de T_d tal como se esperaba pues la ganancia del sistema no presenta modificación.

1.3. Controlador Proporcional Integral (PI)

En este caso la función de transferencia del controlador viene expresada tal como se muestra en la Ec. 1.9, en la cual K_c y T_i corresponden con la ganancia proporcional y el tiempo integral, respectivamente.

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_c}{T_i} \left(\frac{T_i s + 1}{s} \right) \quad (1.7)$$

Como se puede apreciar este tipo de controlador introduce, además de la ganancia proporcional, un polo en el origen y un cero en el eje real. Su efecto sobre la respuesta transitoria es relativamente negativo, pues desmejora la estabilidad relativa del sistema a lazo cerrado, en tanto que, su efecto sobre la respuesta permanente es una mejora radical, lo cual es debido al aumento del tipo del sistema gracias a la introducción de un cero en el origen.

Partiendo del mismo sistema de control de retroalimentación simple que se utilizó en los otros controladores se desarrolla la función completa del mismo a lazo cerrado la cual se muestra en la Ec. 1.8.

$$G_{LC}(s) = \frac{25K_c (T_i s + 1)}{s^3 + 50T_i s^2 + 25T_i (1 + K_c) s + 25K_c} \quad (1.8)$$

Asimismo, en las Figs. 1.4 (a) y (b) se pueden observar, para un valor de ganancia K_c fijo y varios valores de T_i , las respuestas del sistema de control ante un escalón y una rampa unitaria, respectivamente. Finalmente, en la Tabla 1.3 se muestran ciertas características teóricas de dicho sistema para esas variaciones en los parámetros del controlador. Cabe destacar que, debido a que el orden del sistema aumenta, las características teóricas de la respuesta a lazo cerrado se obtienen aproximando a los polos dominantes, los cuales se muestran en la misma tabla.

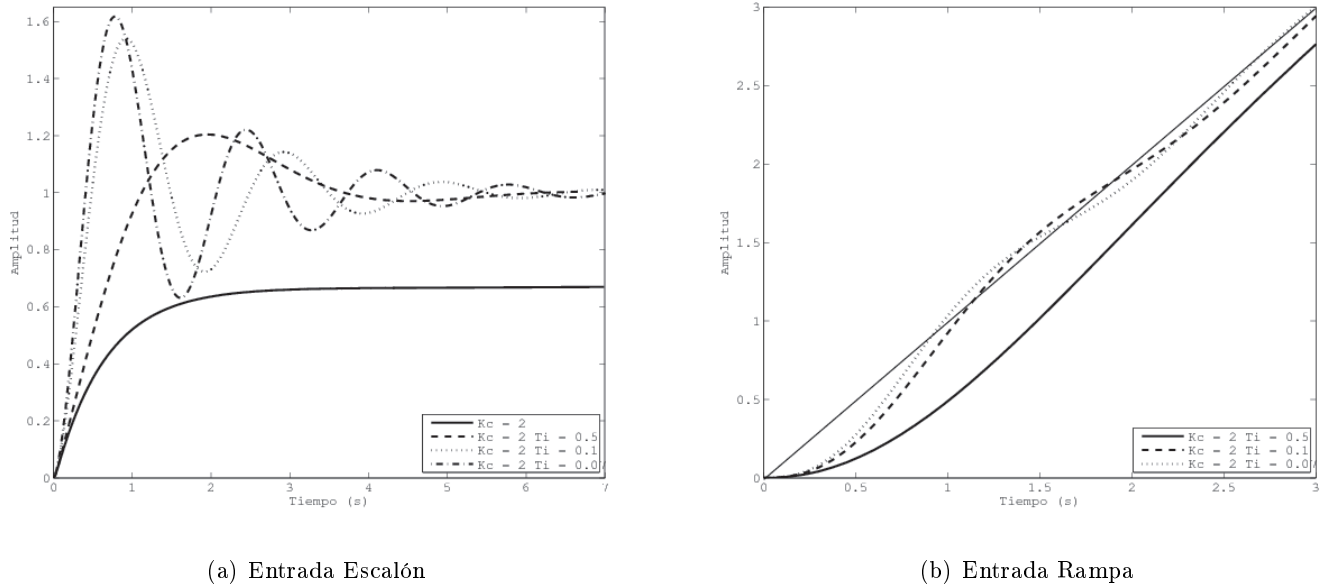


Figura 1.4: Respuesta al escalón y la rampa (Controlador Proporcional Integral)

K_c	T_i	s_1	$s_{2,3}$	ζ	ω_n	$t_s(2\%)$	$Mp(\%)$	e_{ss} (escalón)	e_{ss} (rampa)
2	-	-48	-1,5	2,89	8,66	2,58	0	0,33	∞
2	0,5	-48	$-0,75 \pm 1,223j$	0,52	1,43	5,33	14,56	0	0,25
2	0,1	-48	$-0,66 \pm 3,135j$	0,20	3,20	6,01	51,36	0	0,05
2	0,07	-48	$-0,61 \pm 3,777j$	0,16	3,82	6,47	59,81	0	0,035

Cuadro 1.3: Características Teóricas de la Respuesta (Controlador Proporcional)

En el ejemplo presentado queda claramente demostrado que el efecto de añadir una parte integral al controlador produce una mejora radical sobre la respuesta permanente a expensas de la respuesta transitoria. Tal como se observa, ante una entrada escalón, el error se reduce a cero pero la respuesta presenta un aumento apreciable en su tiempo de establecimiento y en su sobreimpulso. Asimismo, ante una entrada rampa, el error pasa de infinito a finito y mejora a medida que aumenta el efecto integral.

1.4. Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

La función de transferencia del controlador viene expresada tal como se muestra en la Ec. 1.9, en la cual figuran todos los parámetros mencionados anteriormente.

$$G_c(s) = K_c \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_c}{T_i} \left(\frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{s} \right) \quad (1.9)$$

Como se puede observar se añaden dos ceros y un polo en el origen a la función de transferencia de lazo abierto, a través de lo cual se puede lograr un buen manejo de la respuesta temporal y una mejora radical en la respuesta permanente. Lo primero se alcanza gracias a la reubicación de los polos a lazo cerrado y lo segundo, proviene del aumento del tipo de sistema a lazo abierto. Es importante hacer resaltar que la escogencia del tipo de controlador a utilizar dependerá de las condiciones o restricciones preestablecidas para el sistema de control.

Para este caso se ilustra el efecto de este tipo de controlador mostrando en la Fig. 1.5 la comparación de la respuesta al escalón del sistema estudiado previamente cuando se tiene un controlador proporcional, proporcional integral y proporcional integral derivativo.

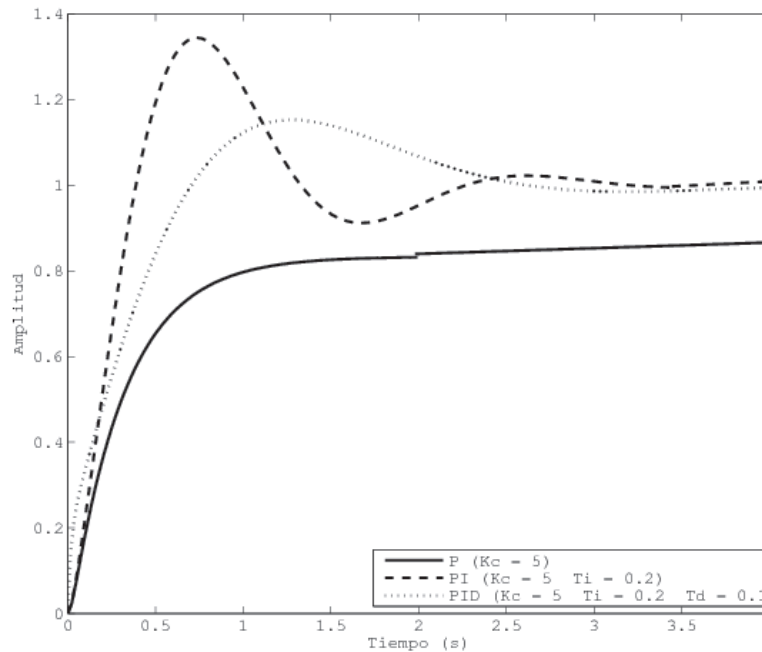


Figura 1.5: Respuesta al escalón (Controlador Proporcional Integral Derivativo)

Tal como se puede apreciar cuando se tiene solamente un controlador proporcional la respuesta transitoria no presenta sobreimpulso pero tiene un error apreciable al escalón, el cual disminuye a cero al añadir una parte integral al controlador a expensas de la respuesta transitoria. Finalmente, al completar el PID añadiendo una parte derivativa, se mantiene la mejora en el error y se logran mejoras sobre la respuesta transitoria.

1.5. Diseño del Controlador por Reubicación de Polos

Este método consiste en reubicar los polos a lazo cerrado de un sistema variando el tipo de controlador a añadir y los parámetros del mismo. A continuación se mostrarán algunos ejemplos de diseño, utilizando el método de reubicación de polos para sistemas sencillos, los cuales ponen en evidencia el efecto que cada tipo de controlador tiene sobre la respuesta a lazo cerrado.

Ejemplo

Para el sistema de control que se muestra en la Fig. 1.6 se desea diseñar un controlador tal que la respuesta a lazo cerrado cumpla con las restricciones que se enumeran a continuación.

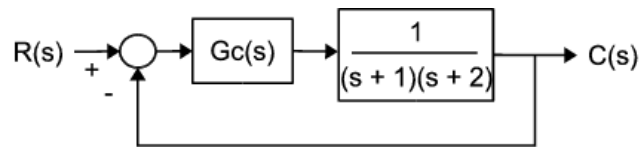


Figura 1.6: Diagrama de bloques

- $e_{ss} \leq 0,2$ ante el escalón unitario
- $t_s 2\% \leq 2$

Especifique claramente la función de transferencia del controlador, así como, el rango para el valor de sus parámetros y unos valores particulares escogidos por usted.

Solución

Inicialmente se debe analizar la respuesta que tiene el sistema a lazo cerrado sin introducir ningún controlador para verificar si cumple o no con las restricciones impuestas. De no ser así, se debe analizar que parte de la respuesta, transitoria o permanente, no cumple con lo establecido, para iniciar el diseño en forma razonada.

Para el sistema sin controlador se verifica el error solicitado y se revisa la Ecuación Característica a Lazo Cerrado (ECLC).

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} = 0,666 \quad (1.10)$$

Ecuación Característica a Lazo Cerrado (ECLC)

$$1 + \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0 \rightarrow s^2 + 3s + 3 = 0 \quad (1.11)$$

A partir de esta ecuación es posible obtener los valores de ξ y ω_n a lazo cerrado resolviendo las Ecs. 1.12 y 1.13.

$$2\xi\omega_n = 3 \quad (1.12)$$

$$\omega_n^2 = 3 \quad (1.13)$$

$$\xi = 0,86 \quad \omega_n = 1,73$$

El tiempo de establecimiento se calcula tal como se muestra en la Ec. 1.14.

$$t_{s\ 2\%} = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{8}{3} = 2,66 \quad (1.14)$$

Debido a que no se cumplen ninguna de las restricciones y que se deben mejorar tanto la respuesta transitoria como la permanente, se puede intentar el diseño de un controlador proporcional, el cual es el más sencillo y es también el más fácil de diseñar.

Controlador Proporcional

Se introduce en el sistema de control el controlador escogido, se calcula el error y se desarrolla la ECLC. A partir de la Ec. 1.15 se obtiene la primera restricción para la ganancia proporcional.

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{K_c}{(s+1)(s+2)} \right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{K_c}{2} \right)} \leq 0,2 \quad (1.15)$$

$$\frac{K_c}{2} \geq 4 \Rightarrow K_c \geq 8 \quad (1.16)$$

Ecuación Característica a Lazo Cerrado

$$1 + \frac{K_c}{(s+1)(s+2)} = 0 \rightarrow s^2 + 3s + (K_c + 2) = 0 \quad (1.17)$$

1 Efecto de los Controladores

A partir de esta ecuación se pueden definir las restantes restricciones que debería tener K_c para cumplir con lo solicitado. En principio, es necesario que lo planteado en la Ec. 1.18 se cumpla para garantizar que el sistema a lazo cerrado sea estable.

$$K_c + 2 > 0 \Rightarrow K_c > -2 \quad (1.18)$$

Ahora se deben utilizar las Ecs. 1.19 y 1.20 para verificar si K_c puede ser ajustada para lograr que se cumplan con las restricciones.

$$2\xi\omega_n = 3 \quad (1.19)$$

$$\omega_n^2 = K_c + 2 \quad (1.20)$$

Si se fija el valor de K_c en el valor mínimo que satisfaga el requerimiento de error se tendrán los siguientes valores para ξ y ω_n .

$$\omega_n = 3,16 \quad \xi = 0,47$$

Como el valor de ξ es menor que uno el cálculo del tiempo de establecimiento se realizará tal como se muestra en la Ec. 1.21, en la cual se puede apreciar que el tiempo de establecimiento no dependerá del valor de K_c y no podrá ser modificado para lograr el valor requerido.

$$t_{s\ 2\%} = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{1,5} = 2,66 \quad (1.21)$$

De esta forma se puede concluir que un controlador proporcional no será suficiente para lograr que el sistema se comporte como es deseado. Es posible mejorar la respuesta permanente pero no la transitoria, por lo cual se intenta el diseño de un controlador proporcional derivativo cuyo efecto es mayormente sobre la respuesta transitoria.

Controlador Proporcional Derivativo

En principio se realiza nuevamente el cálculo del error, considerando la nueva función de transferencia para el controlador, tal como se muestra en la Ec. 1.22.

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{K_c(Ts+1)}{(s+1)(s+2)} \right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{K_c}{2} \right)} \leq 0,2 \quad (1.22)$$

Como se puede observar el error solamente depende del valor de la ganancia proporcional, por lo tanto el límite para la misma será igual que si el controlador fuese solamente proporcional. Para analizar la respuesta transitoria se obtiene, en la Ec. 1.23, la ECLC para este caso particular.

$$1 + \frac{K_c (T_d s + 1)}{(s + 1)(s + 2)} = 0 \rightarrow s^2 + (K_c T_d + 3) s + (K_c + 2) = 0 \quad (1.23)$$

Ahora se deben utilizar las Ecs. 1.24 y 1.25 para verificar si K_c y T_d pueden ser ajustados para lograr que se cumplan con las restricciones.

$$2\xi\omega_n = K_c T_d + 3 \quad (1.24)$$

$$\omega_n^2 = K_c + 2 \quad (1.25)$$

Si se fija el valor de K_c en el valor mínimo que satisfaga el requerimiento de error se puede fijar el valor de T_d tal que se satisfaga la condición de tiempo de establecimiento tal como se muestra en la Ec. 1.26.

$$t_{s\ 2\%} = \frac{8}{8T_d + 3} \leq 2 \Rightarrow 8T_d + 3 \geq 4 \Rightarrow T_d \geq 0,125 \quad (1.26)$$

A partir de lo anterior se puede concluir que un controlador proporcional derivativo cuyos parámetros satisfagan las Ecs. 1.16 y 1.26 será capaz de satisfacer las restricciones establecidas.

Para completar el ejemplo se muestra en la Fig. 1.7 la simulación de la respuesta del sistema de control ante una entrada escalón para tres casos, sin controlador, con un controlador proporcional y con otro proporcional derivativo.

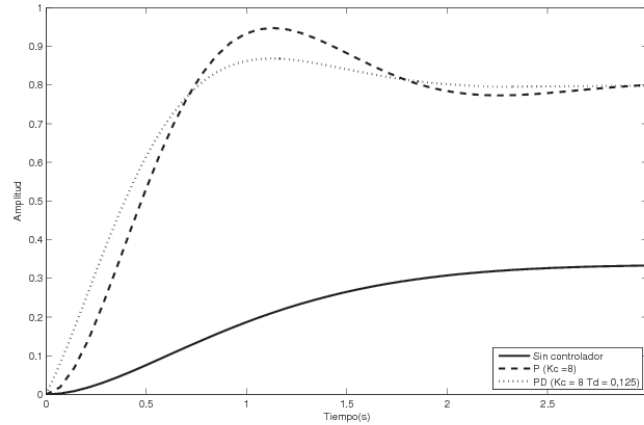


Figura 1.7: Respuesta al escalón del sistema de control

Tal como se puede observar el sistema original sin controlador no logra satisfacer ninguno de los dos requerimientos, pero al introducir el controlador proporcional se consigue el error deseado pero la respuesta transitoria no satisface lo requerido. Finalmente al añadir el controlador proporcional derivativo se satisfacen con todas condiciones impuestas.

Ejemplo

En un proceso de fabricación se tiene requiere un sistema de control de temperatura cuyo esquema se muestra en la Fig. 1.8. Se desea que la variable controlada cumpla con los siguientes requerimientos para lo cual se disponen de controladores P, PD, PI y PID.

- $e_{ss} \leq 0,1$ ante el escalón unitario
- $t_s 2\% \leq 1$

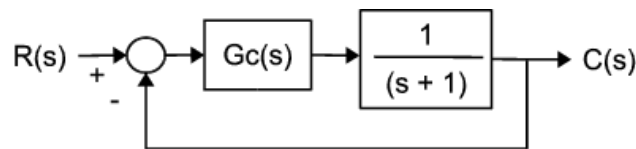


Figura 1.8: Sistema de Control de Temperatura

Una vez escogido y diseñado el controlador correspondiente verifique si es posible que el error al escalón pueda llevarse a cero. De no ser así, escoja un nuevo controlador y escoja sus parámetros de forma tal que tenga una respuesta transitoria sin sobreimpulso.

Solución

Al igual que en ejemplo anterior se verifica si el sistema sin controlador cumple o no con las restricciones impuestas, para lo cual se calculan su error y su tiempo de establecimiento, tal como se muestra en las Ecs. 1.27 y 1.28.

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(s+1)} \right)} = \frac{1}{1+1} = 0,5 \quad (1.27)$$

$$t_{s\ 2\%} = 4\tau = 4 \quad (1.28)$$

Tal como se observa no se cumplen ninguna de las dos restricciones pero las mismas podrían cumplirse mejorando la ganancia a lazo abierto por lo que se intenta el diseño de un controlador proporcional.

Controlador Proporcional

Se verifica si es posible obtener algún rango de valores para la ganancia proporcional de forma tal que puedan satisfacerse los requerimientos antes mencionados. Primero se calcula el error y luego se obtiene la ECLC con la intención de verificar la ubicación de las raíces en función de K_c .

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{K_c}{(s+1)} \right)} = \frac{1}{1 + K_c} \leq 0,1 \Rightarrow K_c \geq 9 \quad (1.29)$$

Ecuación Característica a Lazo Cerrado (ECLC)

$$1 + \frac{K_c}{(s+1)} = 0 \Rightarrow s + (K_c + 1) = 0 \quad (1.30)$$

A partir de allí se puede concluir que la ubicación de la raíz a lazo cerrado dependerá del valor de la ganancia por lo que se podrá modificar el tiempo de establecimiento.

$$t_{s\ 2\%} = 4\tau = \frac{4}{K_c + 1} \leq 1 \Rightarrow K_c \geq 3 \quad (1.31)$$

Se puede concluir que un controlador proporcional cuya ganancia sea mayor o igual a 9 logrará que el sistema de control cumpla con lo establecido inicialmente pero no podrá satisfacer la restricción de tener un error cero ante una entrada rampa pues para ello el sistema a lazo abierto debe ser de tipo I, lo cual se logra inmediatamente si se introduce un controlador proporcional integral.

Controlador Proporcional Integral

Satisfecha la restricción de error es necesario calcular el valor de los parámetros del controlador tal que se cumplan con las restricciones de respuesta transitoria para lo que se desarrolla la ECLC.

Ecuación Característica a Lazo Cerrado (ECLC)

$$1 + \frac{K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)}{(s+1)} = 0 \Rightarrow s^2 + (K_c + 1)s + \frac{K_c}{T_i} = 0 \quad (1.32)$$

$$2\xi\omega_n = K_c + 1 \quad (1.33)$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_c}{T_i} \quad (1.34)$$

Utilizando las Ecs. 1.33 y 1.34 se verifica que rango deberán tener los dos parámetros del controlador para satisfacer lo solicitado. En principio se puede observar que el tiempo de establecimiento solamente dependerá del valor de K_c pues el producto de $\xi\omega_n$, que determina dicho tiempo solamente depende de K_c , de allí que utilizando la Ec. 1.35 se establece la primera restricción para el valor de K_c .

$$t_{s\ 2\%} = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{K_c + 1}{2} \geq 4 \Rightarrow K_c \geq 7 \quad (1.35)$$

Ahora para lograr que el sistema no tenga sobreimpulso se puede fijar el valor del factor de amortiguación como mayor o igual a uno y se verifica para que valores de los parámetros del controlador esto sea posible. Para ello se fija K_c en su valor límite y se intenta encontrar un valor de T_i con el que se logre lo solicitado.

$$\xi = \frac{4}{\omega_n} = \frac{4}{\sqrt{\frac{7}{T_i}}} \geq 1 \Rightarrow T_i \geq 0,4375$$

En la Fig. 1.9 se muestran las respuestas del sistema de control ante una entrada escalón para diferentes casos, sin controlador, con un controlador proporcional y con dos controladores proporcional integral.

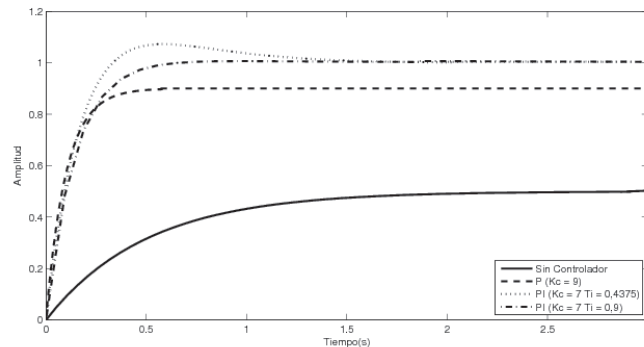


Figura 1.9: Respuesta al escalón del Sistema de Control

Los valores asignados para los parámetros de los controladores son los diseñados a excepción del último caso en el cual se tuvo que ajustar el valor del tiempo integral, a partir del valor inicialmente asignado, para lograr cumplir con el requerimiento de que el sistema no tuviese sobreimpulso. Esto último es debido a que el método de diseño se fundamenta únicamente en la reubicación de los polos sin considerar el efecto de los ceros de la función de transferencia, lo cual no desestima la utilidad del método pues en forma muy sencilla se obtienen valores para los parámetros del controlador diseñado a partir del cual se puede realizar un rápido ajuste que logre lo deseado.

En los ejemplos anteriores se demostró que el procedimiento de diseño por reubicación de polos es de muy fácil aplicación y ofrece la posibilidad de determinar el controlador requerido y sus parámetros. Como se puede observar a medida que el orden del sistema a diseñar aumenta este método tiende a complicarse pues la ecuación característica aumenta de grado y la determinación de la misma en función de los parámetros del controlador se puede hacer bastante engorrosa. Es por ello que el uso de este método queda reducido a casos sencillos pues para sistemas más complejos se utilizaran otros métodos que requieran una mejor análisis de la respuesta del sistema en función de otro tipo de herramientas, más allá de la sencilla aproximación de la respuesta temporal a través de la ecuación característica del sistema.

A continuación se presentará otro método sencillo para fijar los parámetros del controlador conocido como sintonización de controladores.

1.6. Sintonización de Controladores

El diseño de controladores, tal como se mostró en la sección anterior, se realiza en función del conocimiento del proceso, es decir, a partir del modelo del proceso, del esquema de control y de las restricciones que se le imponen al mismo. A diferencia de ello, la sintonización de los controladores se realiza sin que se disponga de dicha información y resulta sumamente útil en los casos en que la obtención del modelo del proceso es muy engorrosa. Los métodos de diseño utilizan restricciones particulares impuestas a la respuesta deseada que permiten determinar con precisión los parámetros del controlador, en tanto que en el caso de la sintonización de un controlador, dichos parámetros se van ajustando de forma tal que se obtenga una respuesta temporal aceptable.

Los métodos de sintonización están basados en estudios experimentales de la respuesta al escalón de diferentes tipos de sistemas, razón por la cual los parámetros del controlador que se determinan utilizando estas metodologías podrían dar como resultado una respuesta medianamente indeseable. Es por ello que dichos parámetros se utilizan como punto de partida para la definitiva sintonización de los mismos, lo cual se realizará ajustándolos finamente de forma tal que se logre obtener la respuesta deseada.

En esta sección se mostraran dos reglas de sintonización de controladores desarrolladas por Ziegler y Nichols, las cuales simplifican altamente el problema de fijar los parámetros de un controlador. Dichas reglas podrían no ser la mejor alternativa pero su sencillez y disponibilidad las mantienen como una fuerte opción aún hoy en día.

1.6.1. Primer Método (Curva de Reacción)

En este método la respuesta de la planta al aplicar un escalón unitario debe tener el aspecto de una curva en forma de S, como se observa en la Fig. 1.10, en el caso en que la curva no presente esta dicha forma, no es posible aplicar el método. Si la planta incluye integrador(es) o polos dominantes complejos conjugados, la respuesta al escalón unitario no será como la requerida y no podrá utilizarse el método.

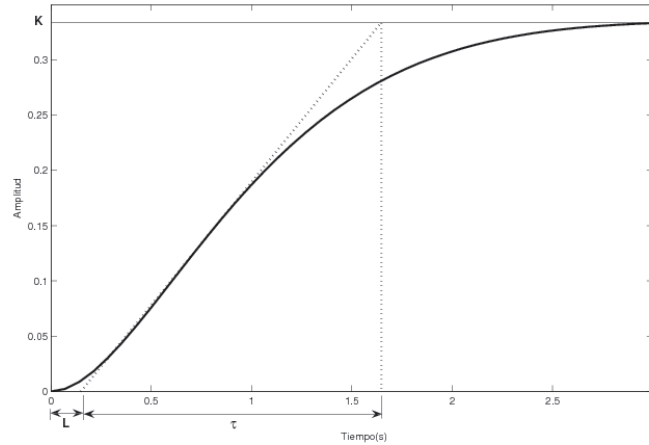


Figura 1.10: Respuesta al escalón unitario. Curva de reacción

La respuesta al escalón se obtiene experimentalmente y a partir de allí el modelo del proceso puede ser aproximado a una función de transferencia como la que se muestra en la Ec. 1.36, en la cual los parámetros K , τ y L corresponden con la ganancia, la constante de tiempo y el retardo del proceso y deben ser identificados a partir de dicha respuesta.

$$Gp(s) = \frac{K \exp^{-Ls}}{\tau s + 1} \quad (1.36)$$

Una vez identificados los parámetros antes mencionados se fijaran los parámetros del controlador utilizando la Tabla 1.4.

Tipo de Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{\tau}{L}$	∞	0
PI	$0,9 \frac{\tau}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2 \frac{\tau}{L}$	$2L$	$0,5L$

Cuadro 1.4: Parámetros del controlador. Método de la Curva de Reacción

Ejemplo

En la Fig. 1.11 se muestra un esquema de control de nivel para el cual la función de transferencia del proceso $G_p(s)$ es desconocida y no se dispone de información suficiente como para determinarla. Se desea que, ante una entrada escalón unitario, la respuesta del lazo cerrado no presente error alguno, que su tiempo de establecimiento al 2% no exceda los 0,5 seg. y que su sobreimpulso sea menor al 5%.

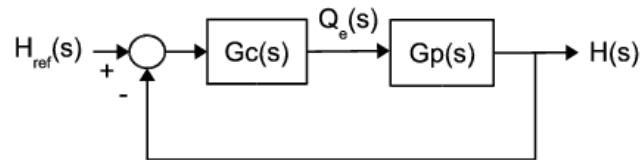


Figura 1.11: Diagrama de bloques del esquema de control

La única información disponible es que la variación de la altura $h(t)$ presentó una respuesta como la que se muestra en la Fig. 1.12 cuando el caudal $Q_e(t)$ tuvo una variación del tipo escalón unitario.

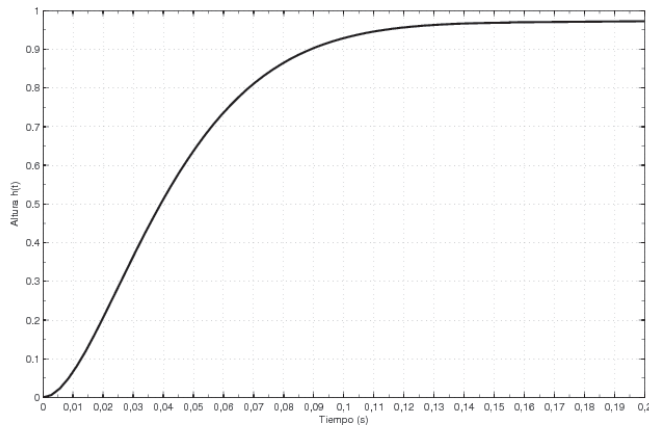


Figura 1.12: Respuesta del proceso ante el escalón unitario

Se espera que usted logré establecer el tipo de controlados necesario y que ajuste sus parámetros de forma tal que la respuesta del sistema de control este dentro de los rangos solicitados.

Solución

Al revisar la forma de la respuesta del proceso al escalón se comprueba que tiene la forma requerida para poder aplicar el primer método de sintonización de Ziegler-Nichols según el cual lo primero que se debe hacer es identificar los parámetros de la función de transferencia del proceso a partir de la

respuesta del mismo. En la Fig. 1.13 se muestra como se realiza la identificación de dichos parámetros y posteriormente se muestran los mismos.

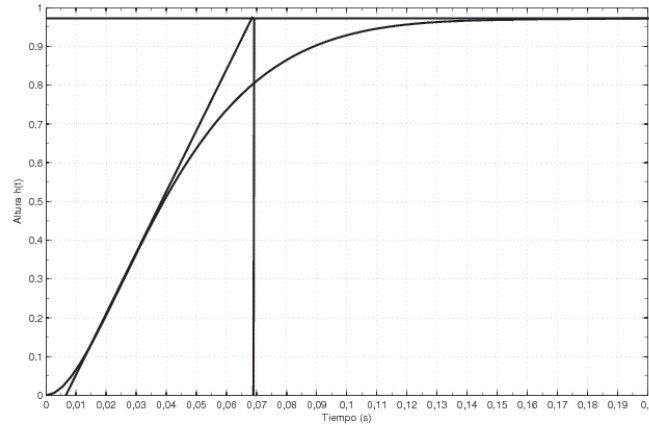


Figura 1.13: Identificación de la función de transferencia

$$K = 0,975 \quad L = 0,006 \quad \tau = 0,068 - 0,006 = 0,0674$$

Disponiendo de la información relativa al proceso es posible completar en la Tabla 1.5 los valores de los parámetros de los controladores según el método que se está aplicando. Dichos valores servirán de punto de partida para el controlador que sea seleccionado y se irán ajustando los mismos hasta obtener la respuesta deseada.

Tipo de Controlador	K_c	T_i	T_d
P	11,233	∞	0
PI	10,11	0,2	0
PID	13,48	0,012	0,003

Cuadro 1.5: Parámetros iniciales de los controladores

Debido a que una de las restricciones es que el error al escalón sea cero es necesario que el sistema a lazo abierto sea de tipo I por lo que se añade un controlador PI y se muestra en la Fig. 1.14 la respuesta sin controlador y con un controlador PI cuyos parámetros son los que se muestran en la Tabla 1.5.

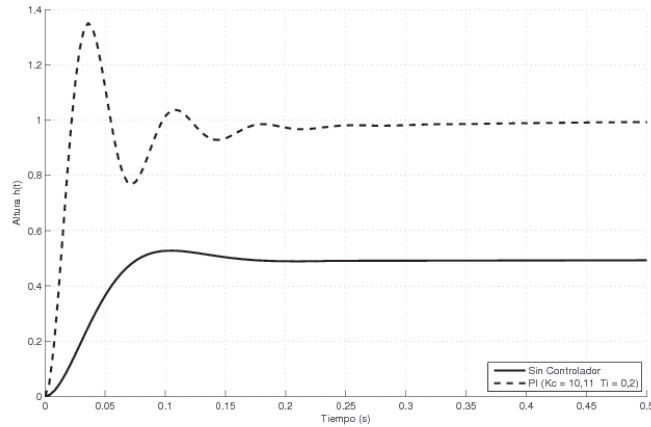


Figura 1.14: Respuesta al escalón (Sin controlador y con un PI)

Como se puede observar al añadir un PI la respuesta cumple inmediatamente con la restricción de error pero su respuesta transitoria se ve altamente afectada. El sobreimpulso y el tiempo de establecimiento aumentan considerablemente, lo cual podría mejorarse disminuyendo el valor de la ganancia proporcional o aumentando el valor del tiempo integral. En las Figs. 1.15 y 1.16 se muestra la respuesta para variaciones en la ganancia proporcional y en el tiempo integral respectivamente.

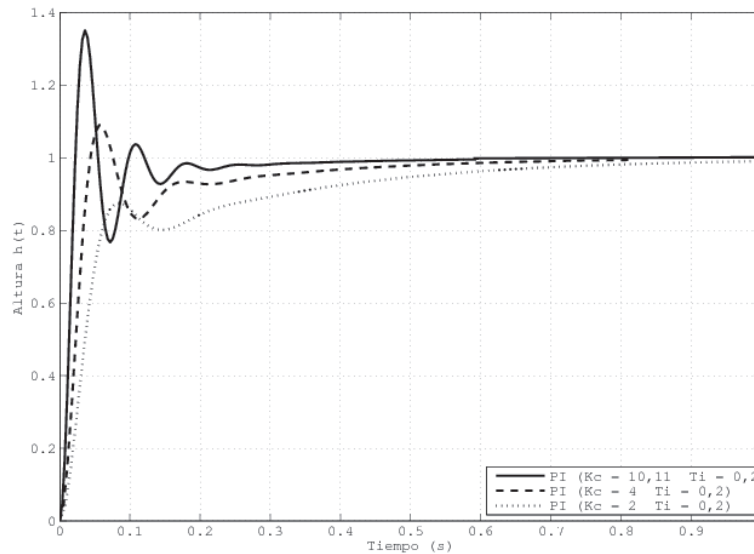


Figura 1.15: Variaciones de la ganancia proporcional

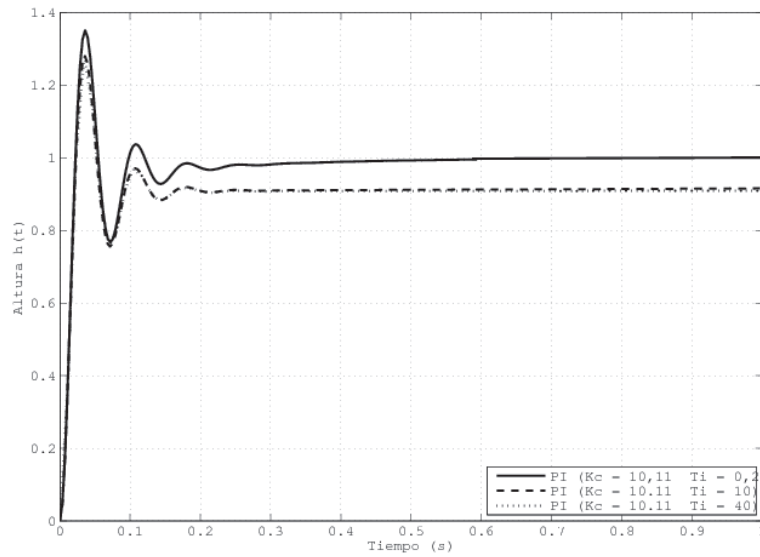


Figura 1.16: Variaciones del tiempo integral

En base a las respuestas mostradas se puede concluir que si se desean ajustar los parámetros del controlador para mejorar la respuesta transitoria, en lo relativo a su sobreimpulso, la mejor alternativa será disminuir la ganancia proporcional pues la modificación del tiempo integral no presenta grandes ventajas. Lamentablemente el tiempo de establecimiento aumenta considerablemente al aumentar la ganancia lo cual debe tomarse en cuenta al momento de fijar el T_i definitivo.

Finalmente se decide colocar un controlador PI cuyos parámetros serán $K_c = 2$ y $T_i = 0,2$ gracias a lo cual la respuesta cumple con todas las restricciones impuestas.

A continuación se describirá el segundo método de sintonización que puede ser aplicado a otro tipo de procesos.

1.6.2. Segundo Método (Oscilación Continua)

Este método solamente puede aplicarse cuando un proceso a lazo cerrado, como el que se muestra en la Fig. 1.17, presenta una respuesta que oscile continuamente, como la que se muestra en la Fig. 1.18, para un valor específico de su ganancia a lazo abierto, es decir, el sistema a lazo cerrado tiene una ganancia crítica, la cual corresponde con el límite de estabilidad del sistema a lazo cerrado.

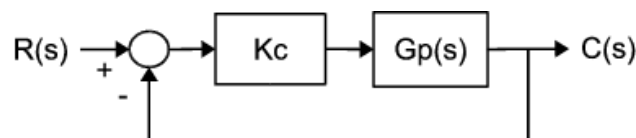


Figura 1.17: Esquema de Control

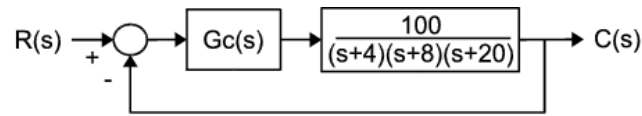


Figura 1.19: Sistema de Control

Solución

Como se dispone de la función de transferencia del proceso es posible utilizar el método el Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz para verificar si el sistema a lazo cerrado tiene o no una ganancia crítica a la cual oscile continuamente. Para ello se utiliza la ecuación característica a lazo cerrado que se muestra en la Ec. 1.37.

$$1 + \frac{K_{LA}}{(s+4)(s+8)(s+20)} = 0 \Rightarrow s^3 + 30s^2 + 224s + (480 + 100K_{LA}) = 0 \quad (1.37)$$

s^3	1	224
s^2	30	$480 + 100K_{LA}$
s^1	b_1	0
s^0	$480 + 100K_{LA}$	

$$b_1 = \frac{6720 - (480 + 100K_{LA})}{12} \geq 0 \Rightarrow K_{LA} \leq 62,4 \Rightarrow K_{cr} = 62,4$$

A partir de dicho valor de ganancia crítica es posible obtener las soluciones de la ECLC para esa ganancia y con ello se obtendría el P_{cr} tal como se muestra a continuación.

$$s^3 + 30s^2 + 224s + 6720 = 0$$

$$s_1 = -30 \quad s_{2,3} = \pm 14,96j \Rightarrow \omega_{cr} = 14,96 \Rightarrow P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} \Rightarrow P_{cr} = 0,42$$

Con dichos valores de K_{cr} y de P_{cr} se utiliza la Tabla 1.7 para determinar los valores iniciales del controlador, los cuales se ajustarán hasta lograra la respuesta deseada.

Tipo de Controlador	K_c	T_i	T_d
P	31,2	∞	0
PI	28,08	0,35	0
PID	31,2	0,21	0,0525

Cuadro 1.7: Parámetros del controlador

Como se solicita error cero al escalón el sistema a lazo abierto debe ser de Tipo I por lo que se debe añadir un polo en el origen, lo cual solamente se logra al añadir el PI o el PID. Se intenta primero verificar si la respuesta con el PI cumple también con las restricciones de respuesta transitoria, para lo cual se muestra en la Fig. 1.20 la simulación de la respuesta ante el escalón con y sin controlador.

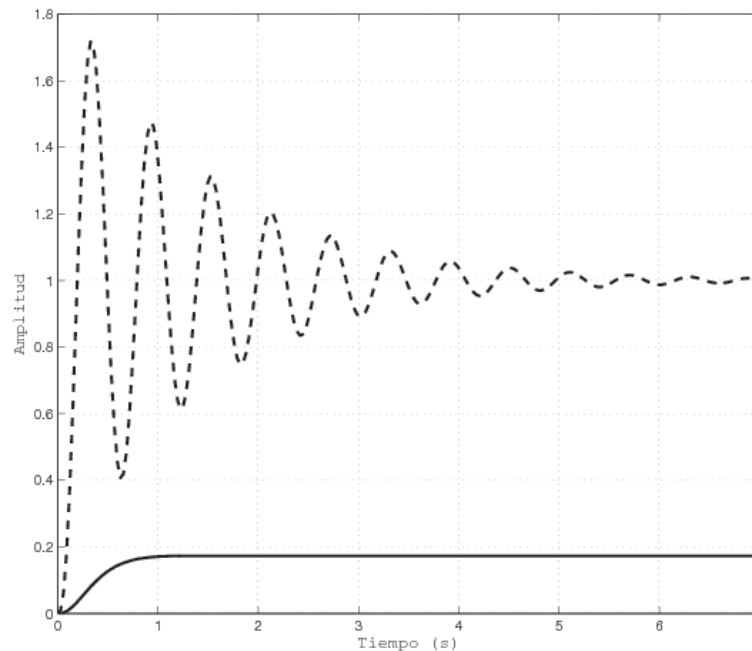


Figura 1.20: Respuesta al escalón (Sin controlador y con un PI)

Al introducir el controlador PI se logra satisfacer la restricción de error pero la respuesta transitoria desmejora considerablemente, por lo cual se intenta ajustar el valor de los parámetros del controlador. En principio se intenta disminuir el efecto integral aumentando el valor del tiempo integral, lo cual se puede observar en la Fig. 1.21.

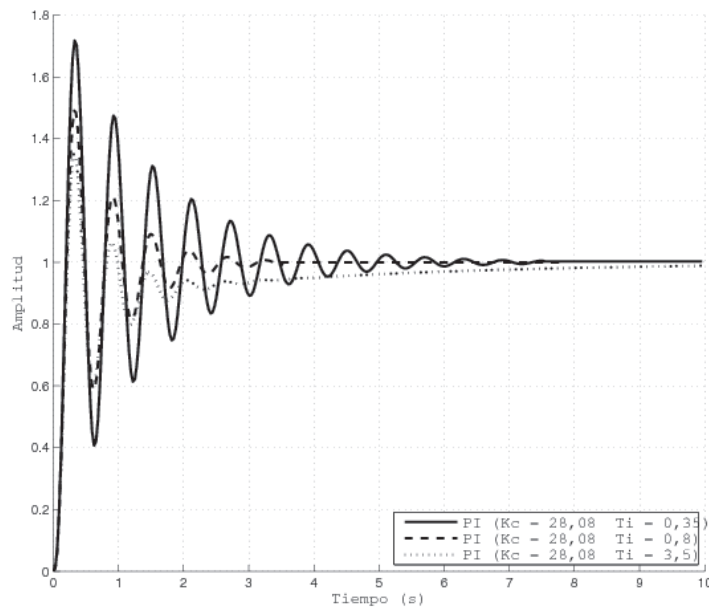


Figura 1.21: Variaciones de T_i

El aumento del T_i mejora la respuesta transitoria pero no lo suficiente, por lo que se intenta ajustar la ganancia proporcional disminuyendo su valor, tal como se observa en la Fig. 1.22.

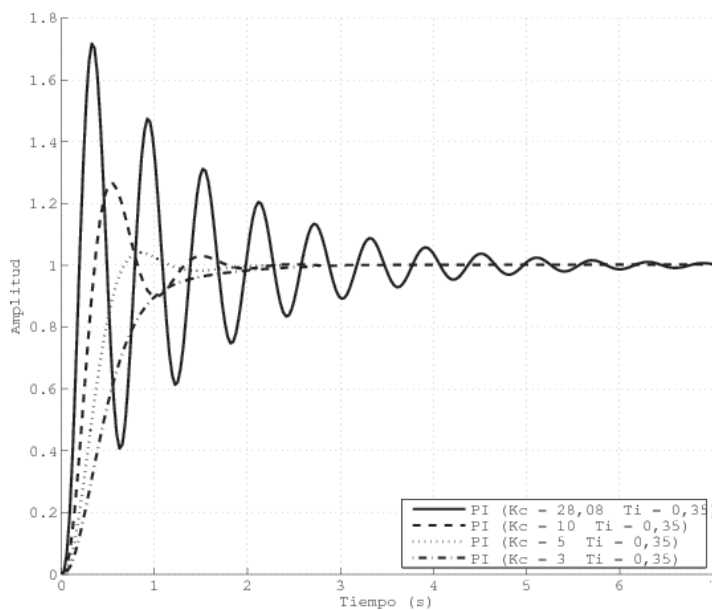


Figura 1.22: Variaciones de K_c

La disminución de la ganancia resulta en una mejora apreciable de la respuesta transitoria por lo que se escoge un controlador PI cuyos parámetros sean $K_c = 3$ y $T_i = 0,35$.